التصحيح النموذجي لامتحان طويل المدى: رياضيات III

التمرين الأول: (5 نقاط)

1) حساب التكامل المضاعف: $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \;/\; 1\leq x^2+y^2\leq 4\}.$$

نضع:

$$0{,}5 \quad x=\rho\cos\theta$$
$$0{,}5 \quad y=\rho\sin\theta$$

إذن

$$x^2+y^2=\rho^2$$

ومنه

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}=\cos\theta & \frac{\partial x}{\partial \theta}=-\rho\sin\theta \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\theta & \frac{\partial y}{\partial \theta}=\rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$1 \quad \operatorname{Det} J=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho\neq 0 \quad (1\leq\rho\leq 2)$$

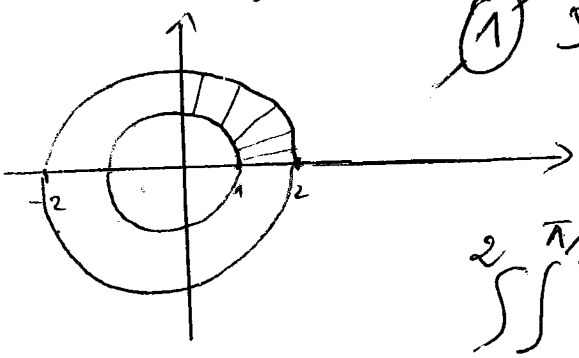
إذن:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_{D'} \rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta \quad 0{,}5$$

تعيين D': لدينا

$$y\geq 0 \wedge x\geq 0$$

$$1 \quad D'=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 \;/\; \begin{matrix}1\leq\rho\leq 2\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$$



ومنه نحسب التكامل على D':

$$\int_1^2\int_0^{\pi/2}\rho^2\,d\rho\,d\theta=\int_1^2\rho^2\,d\rho\times\int_0^{\pi/2}d\theta \quad 01$$

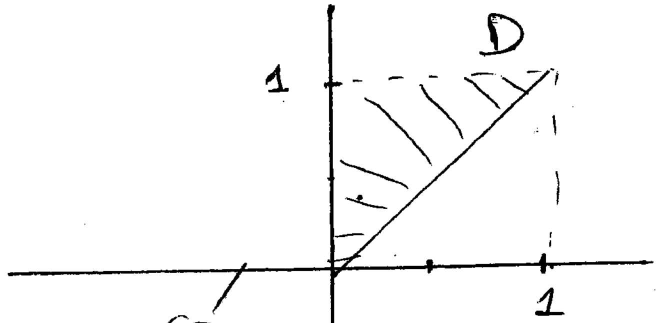
$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7\pi}{6}. \quad 0{,}5$$

حساب التكامل 2)

$\iint 2xe^{-y}\,dx\,dy$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, <1,\ 0<y<1,\ x<y\}.$



على D : $\begin{cases}0<x<y\\ \wedge\\ 0<y<1\end{cases}$

$\begin{cases}0<x<1\\ \wedge\\ x<y<1\end{cases}$ 01 01

ومنه.

$\int_0^1\int_0^y 2xe^{-y}\,dx\,dy$

$=\int_0^1\left(\int_0^y 2xe^{-y}\,dx\right)dy=\int_0^1\left[x^2e^{-y}\right]_0^y dy.$

$=\int_0^1 y^2e^{-y}\,dy=I$ 01

تكامل بالتجزئة:

$\begin{cases}u=y^2\Rightarrow u'=2y\\ v'=e^{-y}\Rightarrow v=-e^{-y}\end{cases}$

$\Rightarrow\int_0^1 y^2e^{-y}\,dy=\left(-y^2e^{-y}\right]_0^1+2\int_0^1 ye^{-y}\,dy=-e^{-1}+2\int_0^1 ye^{-y}$ ---(1)

$\int_0^1 y\cdot e^{-y}\,dy=\left[-ye^{-y}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-y}\,dy$ ----(2)

$=-e^{-1}+\left[-e^{-y}\right]_0^1=-e^{-1}+\left[-e^{-1}+1\right]=1-\frac{2}{e}$

إذن

$\boxed{I=2-\frac{3}{e}}$ 01

التمرين الثاني: دراسة طبيعة التكاملات الموسعة:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+\sqrt{x}+1}$, $f(x)>0,\ \forall x\in[0,+\infty[$

و $f\in loc([0,+\infty[)$.

لدينا: 01

$$\frac{x}{x^3+\sqrt{x}+1} \underset{V(\infty)}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

لأن:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^3+\sqrt{x}+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3\left(1+\frac{1}{x^{5/2}}+\frac{1}{x^3}\right)} = 1.$$

لندرس طبيعة $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}$ لدينا: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2} = \int_0^1\frac{1}{x^2} + \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}$ 0,5

مجموع تكاملين الأول متباعد (من نوع تكامل ريمان في جوار 0)

و الثاني متقارب (من نوع تكامل ريمان في جوار $+\infty$). 0,5

ومنه المجموع متباعد أي أن $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^3+\sqrt{x}+1}$ متباعد.

2) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{x+1}$, $f(x)>0,\ \forall x\in[0,+\infty[$, $f\in loc(I)$ 0,5

لدينا: 01

$$\frac{e^{-x}}{x+1} < \frac{1\,e^{-x}}{x+1} < e^{-x},\quad \left(\frac{1}{x+1}<1\right)$$

حسب نظرية المقارنة بما أن $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ متقارب فإن 0,5

$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}dx$ متقارب أيضا. 0,5

3) $\int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,dx$, $f\in Loc(]0,1])$ 0,5

نضع $u=\frac{1}{x} \Leftarrow$

$$\int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2}\,du$$ 01

باستعمال نظرية Abel

$f(u)=\frac{1}{u^2}$, $f'(u)=\frac{-2}{u^3}<0$, $u\in[1,+\infty[$ 0,5

$g(u)=\cos u$, $\left|\int_0^u \cos u\,du\right| < M=2.$ 0,5

إذن $\int_0^1\cos\frac{1}{x}\,dx$ متقارب.

تمرين 4 :

f من الصنف C^1 بتقطع ومنه فهو يقبل النشر
إلى سلسلة فورييه ؛ بما أنه تابع زوجي فإن
$b_n = 0$:

حساب a_0 ، a_n :

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$ (0,5)

$$\forall n \geq 1 : a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{x \sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

إذن :

$$\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \dfrac{-4}{\pi(2p+1)^2} \end{cases}$$ (01)

ومنه تعطى سلسلة فورييه للتابع f بـ :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \quad \text{---} (1)$$ (0,5)

- استنتاج $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ ؛ (0,5)

نعوض في (1) $X=0$: نجد : (0,5)

استنتاج: $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$

بتطبيق علاقة بارسفال: $2a_0^2 + \sum_{n\geq 1}(a_n^2+b_n^2) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(x)\,dx$

$$2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2\pi^2}{3}$$

ومنه:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4} = \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right)\cdot\frac{\pi^2}{16}$$

$$= \frac{\pi^2}{96}.$$

0,5

0,5

0,5